Devoir maison n° 7

À rendre le vendredi 6 décembre

Extrait d'un rapport du jury du CCINP : « *Le futur candidat doit s'appliquer à donner tous les arguments, même simples, conduisant à une conclusion. Nous lui conseillons de s'approprier petit à petit le cours par la pratique des exercices et des problèmes, de travailler les techniques habituelles et surtout de s'entraîner régulièrement à rédiger des questions de manière claire, explicite et structurée.* »

Exercice 1. Suites et calcul matriciel (*d'après CCINP TSI 2023*)
On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et, pour } n \geqslant 0, \ \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = v_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \end{cases}.$$

On note

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et, pour } n \geqslant 0, \ X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique.

Partie I - Éléments propres d'une matrice

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A. En déduire les valeurs propres de A.
2. La matrice A est-elle trigonalisable ? Justifier la réponse.
3. La matrice A est-elle inversible ?
4. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier la réponse.

Partie II - Trigonalisation de A

On considère les éléments suivants de $\mathbb{R}^3$: $b_1 = (0,1,1)$, $b_2 = (1,1,0)$ et $b_3 = (0,0,1)$.

5. Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
7. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$.
   Déterminer P et vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
8. Déterminer une relation entre A, P, T et P^{-1}.

Partie III - Calcul des puissances de T et expression de u_n, v_n, w_n

9. On note $T = N + D$, où D est une matrice diagonale et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Déterminer D et vérifier que N et D commutent.

10. Que vaut N^n pour un entier $n \geqslant 2$?
11. Déduire de ce qui précède une expression de T^n. On donnera chacun de ses coefficients.
12. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir une relation entre X_{n+1}, A et X_n.
13. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de X_n en fonction de A, n et X_0.
14. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de T^n, P et P^{-1}. Démontrer cette relation par récurrence.
15. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 2. **[Facultatif]** (*d'après ATS 2023*)
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On définit l'application f_n sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ f_n(P) = nXP - (X^2 - 1)P'.$$

1. Montrer que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

On définit les polynômes $P_0, \dots, P_n$ par

$$P_k = (X-1)^k (X+1)^{n-k} \quad \text{pour } k \in \{0, \dots, n\}.$$

2. Justifier que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, le polynôme P_k est vecteur propre de f_n et donner la valeur propre associée.
3. En déduire que f_n est diagonalisable et que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.